

Matematika PITUP

16.09.2014.

– pismeni ispit –

IME I PREZIME: _____

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Matematička logika, skupovi, relacije, funkcije**

1. Zadana je funkcije algebre sudova

$$F(x, y, z) = (x \Rightarrow z) \wedge ((\bar{y} \wedge \bar{x}) \vee z).$$

- (a) Odredite semantičku tablicu. (5 bodova)
- (b) Minimizirajte funkciju. (4 boda)
- (c) Nacrtajte logički element. (1 bod)

2. Zadani su skupovi $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4)(2x + 5)(x - 1) = 0\}$ i $B = \{x \in \mathbb{Z} : -3 < |x - 1| \leq 2\}$.

- (a) Ispišite elemente skupova A i B . (2 boda)
- (b) Za skupove A i B odredite $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ te $\mathcal{P}(A)$. (4 boda)
- (c) Neka je na B zadan predikat $P(x, y) = "x \cdot y \leq 0"$. Odredite istinitost sudova $\forall x \exists y P(x, y)$ i $\exists y \forall x \neg P(x, y)$. (4 boda)

3. Na skupu $X = \{-3, -1, 2, 4, 6\}$ zadana je relacija R sa

$$x R y \Leftrightarrow |x + y| \text{ je paran.}$$

- (a) Ispišite matricu incidencije relacije R . Ispišite elemente relacije R . (3 boda)
- (b) Ispitajte koja od svojstava: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost ispunjava relacija R . (5 bodova)
- (c) Da li je R relacija ekvivalencije? Da li je R relacija parcijalnog uređaja? (2 boda)

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Odredite A^{-1} . (4 boda)
- (b) Riješite matricnu jednadžbu: $B(I - XA^{-1}) = B^2 - 2BXA^{-1}$. (6 bodova)

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Odredite vrijednost $\det A$. (5 bodova)
- (b) Izračunajte vrijednost izraza: $\det(2A^T \cdot A^2) \cdot \frac{1}{4} \det(A^{-1})$. (5 bodova)

6. Zadan je sustav

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 3z &= a - 1 \\ x - 2y + 2a \cdot z &= -3 \\ (a + 1)x - y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

- (a) Odredite za koje je vrijednosti parametra a zadani sustav određen. (4 boda)
- (b) Gausovim postupkom odredite rješenje zadanog sustava ako je vrijednost parametra $a = 2$. (6 bodova)

1. (a) Odredite semantičku tablicu. (5 bodova) Rj:

x	y	z	$x \Rightarrow z$	$\bar{y} \wedge \bar{x}$	$(\bar{y} \wedge \bar{x}) \vee z$	F	baz. disj.
1	1	1	1	0	1	1	
1	1	0	0	0	0	0	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
1	0	1	1	0	1	1	
1	0	0	0	0	0	0	$\bar{x} \vee y \vee z$
0	1	1	1	0	1	1	
0	1	0	1	0	0	0	$x \vee \bar{y} \vee z$
0	0	1	1	1	1	1	
0	0	0	1	1	1	1	

- (b) Minimizirajte funkciju. (4 boda)

$$Rj: KNF = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z)$$

$$F_{min} = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee z$$

2. (a) $A = \{-2, 1, 2\}$ i $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

(b) $A \setminus B = \{-2\}$ $B \setminus A = \{-1, 0, 3\}$

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{-2, -1, 0, 3\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{-2\}, \{1\}, \{2\}, \{-2, 1\}, \{-2, 2\}, \{1, 2\}, A\}$$

3. (a) Rj:

	-3	-1	2	4	6
-3	1	1	0	0	0
-1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	1	1
4	0	0	1	1	1
6	0	0	1	1	1

- (b) **refleksivnost:** da,

$$\forall x \in X \Rightarrow x R x \Leftrightarrow x+x \text{ je paran što vrijedi jer je } x+x = 2x.$$

simetričnost: da,

$$\forall x, y \in X \quad x R y \Rightarrow x + y \text{ je paran. } \Rightarrow y + x \text{ je paran. } \Rightarrow y R x$$

antisimetričnost: ne, za $x = 2$ i $y = 4$ vrijedi $(2 R 4) \wedge (4 R 2)$ ali $2 \neq 4$

tranzitivnost: da,

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in X \quad (x R y) \wedge (y R z) &\Rightarrow \\ \Rightarrow (x + y \text{ je paran}) \wedge (y + z \text{ je paran}) &\Rightarrow x + z = x + y + y + \\ z - 2y = \text{paran} + \text{paran} - \text{paran} = \text{paran} &\Rightarrow x R z \end{aligned}$$

- (c) R je relacija ekvivalencije. (refleksivna, simetrična, tranzitivna).
R nije relacija parcijalnog uređaja jer nije antisimetrična.

4. (a) Rj: $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -3 \\ 4 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

(b) Rj: $X = (B - I) \cdot A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

5. (a) Rj: $\det A = -18$

(b) Rj: $\det(2A^T \cdot A^2) \cdot \frac{1}{4} \det(A^{-1}) = 2^4 \cdot \det A \cdot (\det A)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot (\det A)} = 1296$

6. (a) Rj: Sustav je određen za $a = -0, 5$.

(b) Rj: Rješenje sustava je $(23/5, 1, -7/5)$