

Matematika
PITUP Križevci
14.07.2016.
– pismeni ispit –

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Matematička logika, skupovi, relacije, funkcije**

1. Zadana je funkcija algebre sudova formulom

$$F(x, y, z) = ((\bar{y} \wedge \bar{z}) \Rightarrow (x \wedge z)) \Leftrightarrow (y \wedge (\bar{x} \vee \bar{z})).$$

- (a) Izradite semantičku tablicu za funkciju F . (4 boda)
- (b) Ispišite obje normalne forme funkcije F . (2 boda)
- (c) Minimizirajte jednu od normalnih formi. (4 boda)

2. Neka je $T = \{3, 4, 14, 15, 17\}$. Na T je zadana relacija τ sa

$$\tau = \{(x, y) \mid (x - y \geq 0) \vee (x \text{ je prost broj})\}$$

- (a) Ispišite matricu incidencije relacije τ . Prikažite relaciju τ pomoću vrhova i lukova. Ispišite elemente relacije τ . (3 boda)
- (b) Ispitajte koja od svojstava: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost ispunjava relacija τ . (5 bodova)
- (c) Odredite dualnu relaciju od τ . (2 boda)

3. Zadani su skupovi $N = \{x \in \mathbb{N} : \frac{1}{2}x - 3 < 0\}$ i $M = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 3\}$.

- (a) Odredite elemente skupova N i M . (2 boda)
- (b) Odredite $N \setminus M$ i $\mathcal{P}(N \setminus M)$, gdje je sa $\mathcal{P}(X)$ označen partitivni skup skupa X . (3 boda)
- (c) Neka je $L = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Na L^2 zadan je predikat

$$P(x, y) = "x \cdot y \text{ je višekratnik broja } 3."$$

Ispišite tablicu predikata i pojasnite istinitost sudova: (5 bodova)

- i. $\exists!x\forall yP(x, y)$
- ii. $\forall y\exists xP(x, y)$
- iii. $\exists y\forall x\neg P(x, y)$

Rješenje:

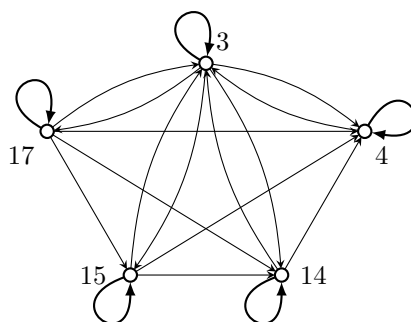
x	y	z	$\bar{y} \wedge \bar{z}$	$x \wedge z$	$(\bar{y} \wedge \bar{z}) \Rightarrow (x \wedge z)$	$\bar{x} \vee \bar{z}$	$y \wedge (\bar{x} \vee \bar{z})$	F	baz. disj.
1	1	1	0	1	1	0	0	0	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
1	1	0	0	0	1	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	0	0	0	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
1	0	0	1	0	0	1	0	1	
0	1	1	0	0	1	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	0	0	1	1	0	0	$x \vee y \vee \bar{z}$
0	0	0	1	0	0	1	0	1	

- (b) KNF = $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$
 DNF = $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$
- (c) $F_{min} = \bar{z} \vee (\bar{x} \wedge y)$
2. (a) $\tau = \{(3, 3), (3, 4), (3, 14), (3, 15), (3, 17), (4, 3), (4, 4), (14, 3), (14, 4), (14, 14), (15, 3), (15, 4), (15, 14), (15, 15), (17, 3), (17, 4), (17, 14), (17, 15), (17, 17)\}$

Matrica incidencije:

	3	4	14	15	17
3	1	1	1	1	1
4	1	1	0	0	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0
17	1	1	1	1	1

Graf:



- (b) refleksivnost: DA, za sve x vrijedi $(x - x) \geq 0$ pa je uvijek $(x, x) \in \tau$
 simetričnost: NE, $(14, 4) \in \tau$ ali $(4, 14) \notin \tau$
 antisimetričnost: NE, $(3, 4) \in \tau$ i $(4, 3) \in \tau$ ali $3 \neq 4$.
 tranzitivnost: NE, $(4, 3) \in \tau$ i $(3, 15) \in \tau$ ali $(4, 15) \notin \tau$
- (c) $\tau^d = \{(14, 4), (15, 4), (17, 4), (15, 14), (17, 14), (17, 15)\}$.
3. (a) $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

- (b) $N \setminus M = \{3, 4, 5\}$ $\mathcal{P}(N \setminus M) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$

	2	3	4	5	6
2	0	1	0	0	1
3	1	1	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	0	1
6	1	1	1	1	1

Sud $\exists! x \forall y P(x, y)$ je lažan je postoje dva takva $x = 3$ i $x = 6$.

Sud $\forall y \exists x P(x, y)$ je istinit, postoji npr. $x = 3$

Sud $\exists y \forall x \neg P(x, y)$ je lažan je $P(3, y)$ uvijek istinit.

4. (a) $\det A = -12$

- (b) $f(A) = A^2 - 2A - 3I =$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(c) X = A^2 - 2A - 3I = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$5. (a) AX = B \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & -8 & -3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} -23/12 \\ 5/4 \\ 55/12 \end{bmatrix}$$

$$(b) \left(-\frac{23}{12}, \frac{5}{4}, \frac{55}{12} \right)$$

$$6. (a) \left(6 - \frac{13}{3}p, 2 - \frac{4}{3}p, p, p \right)$$

$$(b) \text{Bazična rješenja su: } \left(0, \frac{2}{13}, \frac{18}{13}, \frac{18}{13} \right) \quad \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \quad (6, 2, 0, 0)$$